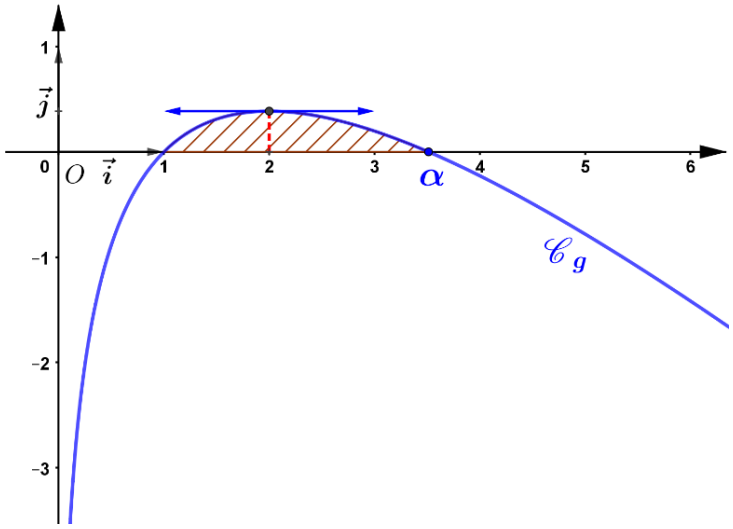
EXERCICE N°3 : | **40'** | **6 points**

I– La figure ci-dessous, montre la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthonormé, de la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=1-x+2\ln(x)$.

◗ La courbe $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses 1 et α.



1°) a) Montrer que $3{,}51<\alpha<3{,}52$.

b) Déterminer le maximum de $g(x)$.

2°) a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^{\alpha}\ln x\,dx$ en fonction de α.

b) En déduire l'aire S (α) du domaine hachuré limité par $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses

II–Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Déterminer le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

b) Montrer que les axes du repère sont asymptotes à $\mathscr{C}_f$.

2°) a) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-4\ln x}{x^3}$.

b) Dresser le tableau de variations de f et montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}$.

c) Tracer $\mathscr{C}_f$.

3°) a) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[1;+\infty[$ admet une fonction réciproque f^{-1}.

b) Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f^{-1}.

c) Résoudre l'inéquation $f^{-1}(x)>\alpha$.

III– Soit (I_n). la suite définie, pour n ≥ 4, par $I_n=\int_n^{n+1}f(x)dx$.

1°) Démontrer que, pour tout x dans l'intervalle $[4;+\infty[$, $0\le f(x)\le\dfrac{1}{x}$.

2°) En déduire que, pour tout entier naturel $n\ge 4$, $0\le I_n\le\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

3°) Déterminer la limite de la suite (I_n).

Qarray.tn -Agra Blech- Qarray.tn